

新阈值函数的自适应去噪

彭继慎¹, 张志超¹, 韩彦春²

(1 辽宁工程技术大学 电气与控制工程学院, 辽宁 葫芦岛 125105;

2 阜新市科技情报研究所, 辽宁 阜新 123000)

摘 要: 提出了一种新阈值函数. 新阈值函数连续性良好, 且高阶可导, 可进行各种数学处理, 提高了阈值的自适应能力. 在新阈值函数的基础上, 利用自适应方法对信号进行消噪处理, 选取最优阈值参数, 达到最优的消除噪声效果.

关键词: 信号处理; 信号去噪; 阈值函数; 自适应

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2016)04-0081-05

A Denoising Algorithm Based on a New Threshold Function Applying Adaptive Learning Algorithm

PENG Ji-shen¹, ZHANG Zhi-chao¹, HAN Yan-chun²

(1 College of Information Science and Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China;

2 Fuxin Science and Technology Information Institute, Fuxin 123000, China)

Abstract: The paper presents a new threshold function. The continuity of the new function is well, besides the function has high-level differentiability. The function can conduct a variety of mathematical processing, thus the adaptive capacity is improved. Signal denoising using adaptive learning algorithm can get the best threshold value based on the new function and achieve the optimal denoising effect.

Key words: signal processing; signal denoising; threshold function; adaptive learning

1 引言

在信号采集传输的过程中, 周遭环境的噪声干扰, 使信号质量下降, 造成信号的失真. 要复原原始的有用信号, 必须去除信号中叠加的噪声干扰成分, 因此信号消噪成为了信号处理中的重要内容. 最常用的信号消噪方法是小波阈值去噪. 但是, 由文献[1-2]可知, 小波阈值去噪中硬阈值函数在阈值点处不连续, 而经过软阈值函数处理的信号与真实信号之间存在着恒定的偏差, 使传输的信号失真. 这些缺陷限制了小波去噪的进一步应用. 针对这些缺点, 本文提出了一种新阈值函数. 与文献[3-4]相比, 新阈值函数连续性良好, 且高阶可导, 可进行各种数学处理等后续工作, 提高了阈值的自适应能力, 这些优点为信号进行

自适应去噪提供了可能. 在新阈值函数的基础上, 利用小波分析与自适应学习相结合的方法对信号进行消噪处理, 此方法能选取最优阈值参数, 得到真实信号的一致估计, 达到最优的消噪效果.

2 小波阈值去噪

2.1 基本描述

设

$$y(t) = x(t) + \delta n(t) \quad (1)$$

为一维含噪声信号模型.

式中, $y(t) = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_{N-1}(t)]^T$ 表示被污染的含噪声信号, $x(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)]^T$ 表示真实信号, $n(t) = [n_0(t), n_1(t), \dots, n_{N-1}(t)]^T$ 表示噪声信号.

δ 为此噪声的噪声强度,当 $\delta = 1$ 时,所加噪声为服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布的高斯白噪声,本文针对 $\delta = 1$ 时的情况进行分析.

信号去噪的目的是去除含噪信号 $y(t)$ 中的噪声信号 $n(t)$,得到所期望的真实信号 $x(t)$. 从数学角度讲,是从 $y(t)$ 中获得在使均方误差(MSE)达到最小的 $x(t)$ 的最佳逼近. MSE 的数学定义为

$$J(\hat{x}, x) = \frac{1}{2} E \| \hat{x} - x \| = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} E (\hat{x} - x)^2 \tag{2}$$

式中, $\hat{x} = f(y)$ 是真实信号 x 的估计, $f(\cdot)$ 为估计算子.

由上述内容,小波阈值去噪数学描述如下:

$$\begin{cases} \lambda_{\text{opt}} = \arg \min_{\lambda \in T} (\| \lambda(t) - x(t) \|) \\ y_{\text{opt}} = \lambda_{\text{opt}}(t), " \text{opt} " \text{代表最优解} \\ y(t) = x(t) + n(t) \\ I = \{ y | y(t) \text{ 为含噪信号} \} \\ W = \text{span} \{ \varphi_{j,k} (\psi_{j,k})_{j=1}^J \} \\ T = \{ \lambda | \lambda \text{ 为 } I \rightarrow W \text{ 的函数空间映射} \} \end{cases}$$

从信号角度讲,是对含噪信号进行滤波,将去噪过程可以看成是低通滤波器滤波的过程^[5]. 但经过小波去噪后的信号能保留真实信号绝大部分特性,因而,它要优于一般意义上的基于傅里叶变换的低通滤波器滤波. 其流程如图 1 所示.

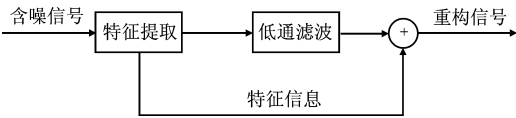


图 1 小波去噪的流程图

2.2 小波阈值去噪

进行小波阈值去噪,首先将式(1)离散化处理,有下式:

$$y(k) = x(k) + n(k), k \in N \tag{3}$$

再进行离散小波变换,如下式:

$$\omega_y(j, k) = \omega_x(j, k) + \omega_n(j, k) \tag{4}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, J; k = 0, 1, 2, \dots, N$$

式中, $\omega_y(j, k)$ 是含噪声信号在 j 尺度下点 k 位置的分解小波系数, $\omega_x(j, k)$ 为真实信号在 j 尺度下点 k 位置的分解小波系数, $\omega_n(j, k)$ 表示噪声信号在 j 尺度下点 k 位置的分解小波系数, J 为小波变换最大分解层数, N 为信号长度.

其次,对 $\omega_y(j, k)$ 、 $\omega_x(j, k)$ 、 $\omega_n(j, k)$ 阈值化处理,即小于设定阈值的小波系数置零,大于设定阈值的被保

留^[5]. 在小波域中, $\omega_x(j, k)$ 较大,而 $\omega_n(j, k)$ 较小. 要想使去噪效果好,就必须选取适当的阈值参数. 若阈值偏小,将残留噪声小波系数,去噪后的信号会掺杂噪声干扰,影响去噪效果;若阈值偏大,部分真实信号的小波系数会被滤掉,导致信号失真^[6]. 因此,阈值的选取至关重要. 本文利用自适应算法选取阈值.

最后一步是利用经阈值化处理的小波系数进行小波逆变换,经重构,得到去噪信号.

2.3 新阈值函数的提出

软、硬阈值函数消噪方法为传统的小波阈值去噪方法.

硬阈值函数为

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \omega_{j,k}, & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

软阈值函数为

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{j,k}) (|\omega_{j,k}| - \lambda), & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中, $\omega_{j,k}$ 为小波系数, $\hat{\omega}_{j,k}$ 为 $\omega_{j,k}$ 的估计值, λ 为阈值参数.

对应函数图像如图 2、图 3 所示. 两个函数均选取阈值参数 $\lambda = 3$.

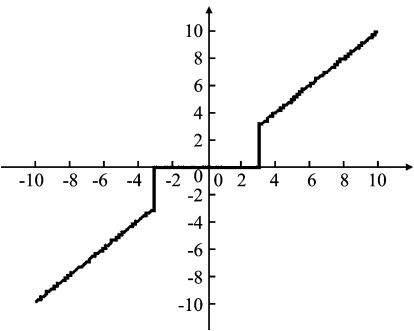


图 2 硬阈值函数图像

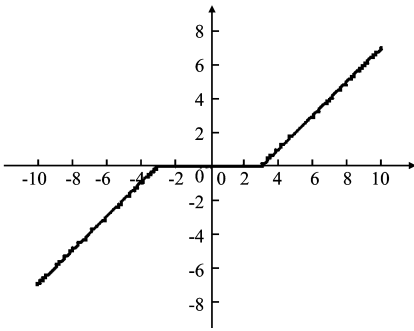


图 3 软阈值函数图像

硬阈值函数法可以很好地将信号的尖峰特性保留下来,但由函数图像易知,硬阈值函数在阈值点 λ 和 $-\lambda$ 处不连续,很容易使重构信号在奇异点附近

产生震荡,产生 Pseudo-Gibbs 现象;软阈值函数较之硬阈值函数具有良好的连续性,经其处理的重构信号相对光滑,但当小波系数超出 $[-\lambda,\lambda]$ 区间时, $\hat{\omega}_{j,k}$ 与 $\omega_{j,k}$ 产生恒定偏差,致使重构信号均方误差较大,逼近程度略差,导致信号失真.针对上述缺陷,本文构造出新阈值函数:

$$\hat{\omega}_{j,k} = \frac{\omega_{j,k} [1 + 2e^{a(-\omega_{j,k}-\lambda)} + e^{-2a\omega_{j,k}}]}{(1 + e^{a(-\omega_{j,k}-\lambda)})(1 + e^{a(-\omega_{j,k}+\lambda)})} \tag{5}$$

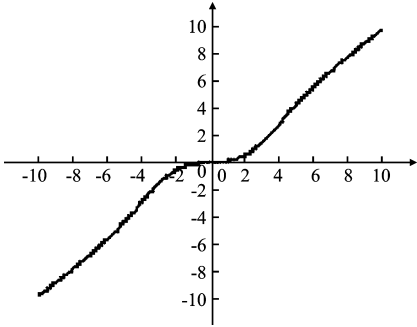
式中, $\omega_{j,k}$ 是小波系数, $\hat{\omega}_{j,k}$ 是估计值, λ 是阈值, a 是可调正参数.下面对函数

$$f(x) = \frac{x[1 + 2e^{a(-x-\lambda)} + e^{-2ax}]}{(1 + e^{a(-x-\lambda)})(1 + e^{a(-x+\lambda)})} \tag{6}$$

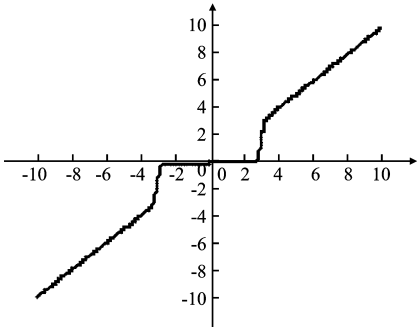
进行讨论.

图 4(a)~(d)为 $\lambda = 3, a$ 分别为 1、10、100、1 000 的情况下对应的函数图像.

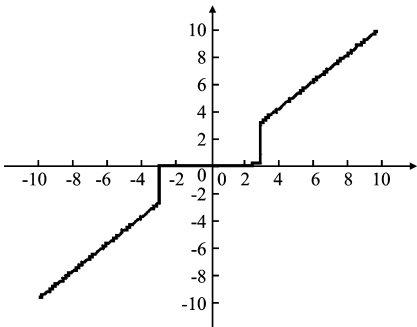
由上述图像可知,本文中的新阈值函数为折衷



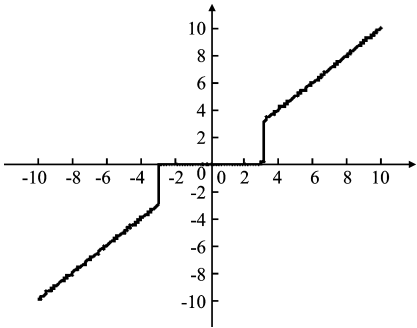
(a) $\lambda = 3, a = 1$



(b) $\lambda = 3, a = 10$



(c) $\lambda = 3, a = 100$



(d) $\lambda = 3, a = 1000$

图 4 不同取值下的函数图像

的函数,且随着 a 的增大,新阈值函数逐渐逼近理想的阈值函数.对函数进一步考察:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2e^{a(-x-\lambda)} + e^{-2ax}}{(1 + e^{a(-x-\lambda)})(1 + e^{a(-x+\lambda)})} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2e^{a(-x-\lambda)} + e^{-2ax}}{(1 + e^{a(-x-\lambda)})(1 + e^{a(-x+\lambda)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2ax} + 2e^{a(x-\lambda)} + 1}{e^{2ax} + e^{a(x+\lambda)} + e^{a(x-\lambda)} + 1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

也即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[1 + 2e^{a(-x-\lambda)} + e^{-2ax}] - x[e^{-2ax} + e^{a(-x+\lambda)} + e^{a(-x-\lambda)} + 1]}{(1 + e^{a(-x-\lambda)})(1 + e^{a(-x+\lambda)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{a(-x-\lambda)} - e^{a(-x+\lambda)}}{(1 + e^{a(-x-\lambda)})(1 + e^{a(-x+\lambda)})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

同理当 $x < 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$,也即 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$.

由上述过程可以得出,新函数 $\hat{\omega}$ 以 $\hat{\omega} = \omega$ 为渐近线. $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\omega}$ 无限接近 ω ,从而解决软阈值方法中 $\hat{\omega}$ 与 ω 一直存在恒定偏差的问题.且 a 值越大,逼近速度越快.由图 4,当 $a = 1\,000$ 时,函数图像已经十分标准,故本文中选取 $a = 1\,000$.

3 自适应消噪

3.1 自适应消噪结构

消噪结构如图 5 所示.此结构由以下三部分构成:首先是对含噪声信号进行正交小波变换,把原始信号分解到小波域;中间是对小波域各个尺度上的

信号进行阈值消噪,与此同时,利用自适应算法求取最优的阈值;最后一部分是进行正交小波逆变换,获得最终消噪信号.该结构各部分由通道连接,连接通道数由小波变换的最大分解尺度决定.由于经过变换后的各尺度上的信号是相对独立的,各个通道也是相对独立的^[7],这使得各通道最终的阈值允许有差别.对于函数:

$$f(x, \lambda) = \frac{x[1 + 2e^{a(-x-\lambda)} + e^{-2ax}]}{(1 + e^{a(-x-\lambda)})(1 + e^{a(-x+\lambda)})}.$$

式中, x 表示输入信号, t 表示阈值.

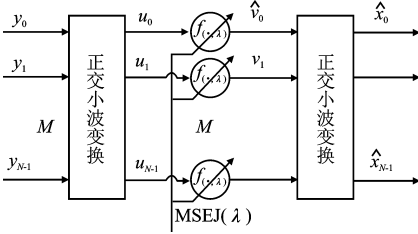


图5 自适应结构

3.2 基于梯度的自适应学习算法

由于只有含噪信号是已知量,误差估计只得由它来实现^[8].据此特点,这里采用基于梯度的自适应算法来对均方误差进行估计.根据式(1),定义函数

$$g(y) = \hat{f}(y) - y \quad (7)$$

式中, $g = [g_0, g_1, \dots, g_{N-1}]$.

当 $g(y)$ 可微时,有 MSE:

$$E \| \hat{f}(y) - x \|^2 = N + E \{ \| g(y) \|^2 + 2 \nabla_y \cdot g(y) \} \quad (8)$$

$$\text{式中, } \nabla_y \cdot g(y) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}$$

对 y 的无偏估计(SURE)定义为

$$J_{\text{SURE}}(\lambda) = N + \| g(y) \|^2 + 2 \nabla_y \cdot g(y) \quad (9)$$

式中, λ 是阈值函数.

由式(7)、式(9)可知,式(9)是对 MSE 的 SURE,其梯度:

$$\frac{\partial J_{\text{SURE}}(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} g_i \cdot \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_i \partial \lambda} \quad (10)$$

式中, $g_i = f(y_i, \lambda) - y_i$, 阈值函数 $f(y, \lambda)$ 也是式(5)中的阈值函数.这样就可求得学习步长:

$$\Delta \lambda_k = \eta \cdot \frac{\partial J}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=k} \quad (11)$$

式中, η 为学习率,在 $\lambda_{k+1} \geq 0$ 的情况下进行取值,则存在关系式:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \Delta \lambda_k \quad (12)$$

式中, λ_{k+1} 、 λ_k 为第 $k+1$ 次和第 k 次阈值.

阈值参数初值取 $\lambda_0 = \sigma_{kv} \sqrt{(2 \log N)/N}$. 其中 σ_{kv} 是噪声层次估计值, N 信号长度,算法收敛标准是: $\Delta \lambda_k / \lambda_k < \epsilon \rightarrow 0^{[7-8]}$.

4 仿真实验

对一段含有白噪声信号用软硬阈值方法和新阈值函数进行仿真实验,通过去噪效果的仿真来验证新阈值函数去噪算法的有效性.再利用小波与自适应学习相结合的方法对新阈值函数进行信号消噪处理仿真,来验证新方法的最优性.仿真实验中,取 $\lambda = \sigma \sqrt{2 \lg(N)/\ln(j+1)}$,其中 j 为分解尺度, σ 是噪声信号标准差,通常是未知的,根据 DONOHO 中值估计, σ 的取值由下式^[9-10]可得.

$$\sigma = \frac{\text{median}(|w_{j,k}|)}{0.6745} \quad (13)$$

从图6、图7仿真结果中可以看出,新阈值函数去噪效果要优于软硬阈值法,不仅消除了伪吉布斯现象,而且还抑制了信号失真.表1给出了这几种方法的 SNR 和 MSE,通过对比表格数据,新阈值函数的信噪比是硬阈值函数的 1.909 209 倍,是软阈值函数的 2.555 236 倍,新阈值函数的误差是硬阈值函数 0.625 826 倍,是软阈值函数的 0.448 66 倍.应用自适应方法后的效果更佳,其信噪比是新阈值函数小波去噪的 1.1919 93 倍,是硬阈值函数的 2.275 764 倍,是软阈值函数的 3.045 825 倍,其误差是新阈值函数的 0.905 334 倍,是硬阈值函数的 0.566 581 倍,是软阈值函数的 0.406 187 倍.更突出地说明了新阈值函数去噪的优越性.且通过对比可得知,新阈值函数在自适应算法下的去噪效果能达到最优.

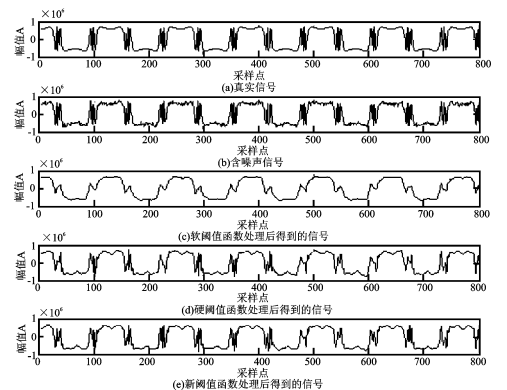


图6 新阈值函数与软硬阈值函数去噪结果对比

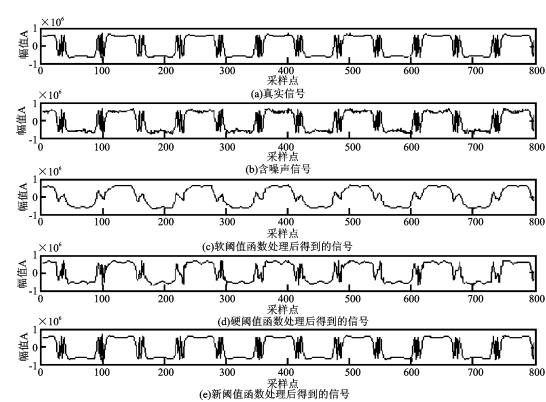


图 7 新阈值函数自适应阈值与软硬阈值函数去噪对比

表 1 几种方法的 SNR 和 MSE

使用方法	SNR/dB	MSE
原始含噪声信号	1.908 6	474 577.614 5
硬阈值函数方法	11.177 3	163 257.630 2
软阈值函数方法	8.351 4	227 724.500 2
新阈值函数方法	21.339 8	102 170.850 5
新阈值函数自适应阈值方法	25.436 9	92 498.735 1

5 结束语

本文为克服传统阈值去噪方法的缺点,提出了新阈值函数.通过仿真实验对比,验证了采用新阈值函数去噪能得到很好的消噪效果,为了进一步提高信噪比,达到最优的去噪效果,本文又提出了将小波变换与自适应学习相结合的算法应用到新阈值函数的去噪中,实验证明,新阈值函数去噪效果能达到最优.

参考文献:

[1] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation

(上接第 80 页)

[5] 侯孟书,王晓斌,卢显良,等.一种新的动态副本管理机制[J]. 计算机科学,2006,33(9):50-51.

[6] Rahman R M, Barker K, Alhadj R. Replica placement strategies in data grid[J]. Journal of Grid Computing, 2008,6(1):103-123.

[7] Fu Xiong, Zhu Xinxin, Han Jingyu, et al. Qos-aware replica placement for data intensive applications[J]. The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications,2013,20(3):43-47.

[8] 石刘,郭明阳,刘浏,等.基于反馈机制的动态副本数量预测方法[J].系统仿真学报,2011,22(S1),193-200.

via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(12): 425-455.

[2] Donoho D L. Denoising by soft thresholding[J]. IEEE Trans on IT, 1995, 41(3): 613-627.

[3] 曲天书.基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪[J].电子学报,2002, 30(2): 266-268.

[4] 张维强,宋国乡.基于一种新的阈值函数的小波域信号去噪[J].西安电子科技大学学报,2004, 31(2): 296-299.

[5] 吴勇.基于小波的信号去噪方法研究[D].武汉:武汉理工大学,2007:4-12.

[6] 张天国.小波分析在信号降噪中的应用研究[D].成都:电子科技大学,2012:22-36.

[7] 闫士杰,王旭,黄延龙,等.小波自适应消噪算法在微型燃机温度检测中的应用[J].仪器仪表学报,2008,29(Supp. 4):252-255.

[8] 纪峰,李翠,常霞,等.基于改进阈值函数的自适应图像去噪方法[J].传感技术学报,2014,27(3):251-254.

[9] 蔡德尊.基于小波变换的图像去噪算法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2011:6-7,21-25.

[10] 罗贺.自适应小波包阈值去噪算法[D].长春:吉林大学,2014:27-32.

作者简介:

彭继慎 男,(1969-),博士研究生,教授,博士生导师.研究方向为工业仪器仪表、传感器技术、自动化技术、工业过程的计算机控制.

张志超(通讯作者) 男,(1991-),硕士研究生.研究方向为模式识别与智能控制、自动化技术、工业过程的计算机控制. E-mail:1154589616@qq.com.

韩彦春 女,(1983-),硕士研究生.研究方向为智能控制、电力传动、自动化技术.

[9] 林菲,张万军,孙勇.一种分布式非结构化数据副本管理模型[J].计算机工程,2013,39(4):36-38.

[10] 祝家鲸,肖丹.云计算架构下的动态副本管理策略[J].计算机工程与设计,2012,33(9):3362-3367.

[11] 王永洲.基于 HDFS 的存储技术的研究[D].南京:南京邮电大学,2013.

作者简介:

李海荣 女,(1976-),硕士,副教授.研究方向为云存储.

方中纯(通讯作者) 男,(1975-),博士,副教授.研究方向为人工智能. E-mail:xiaofang611@126.com.